

Se adesso esprimiamo il segnale $x^*(t)$ nella (E4.20.1) mediante il suo proprio sviluppo in serie di Fourier, otteniamo

$$\begin{aligned}
 P_x &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)x^*(t)dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi kt/T_0} \right)^* dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi kt/T_0} \right) dt = \quad (\text{E4.20.2}) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* \cdot \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-j2\pi kt/T_0} dt \right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2
 \end{aligned}$$

avendo osservato che il termine tra parentesi quadre nella (E4.20.2) è proprio il coefficiente di Fourier X_k di $x(t)$.

4.5 La trasformata di Fourier a breve termine

4.5.1 Analisi spettrale su tempi finiti

Quando vogliamo *misurare* lo spettro di potenza di un segnale sperimentalmente, utilizziamo uno strumento detto *analizzatore di spettro*. Questo strumento permette di analizzare un segnale $x(t)$ e di visualizzare il suo spettro di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ (usualmente in dB) per le sole frequenze positive (chi legge sa perché, dato che parliamo di segnali *reali*) in un intervallo di frequenze selezionabile. Lo spettro viene misurato osservando un segmento del segnale di durata *finita* T_{oss} , anche questa selezionabile dall'utente.

La durata finita dell'intervallo di osservazione introduce evidentemente degli *artefatti* nell'analisi. Questo fenomeno può essere compreso prendendo in considerazione un caso molto semplice e, più precisamente, assumendo che il segnale da analizzare sia sinusoidale puro: $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. In tal caso, sulla base di quanto abbiamo appreso, ci aspetteremo dall'analisi un'unica *riga* alla frequenza f_0 . In realtà, l'analizzatore calcola la trasformata di Fourier sul periodo di osservazione $0 \leq t < T_{oss}$ ottenendo

$$X_{oss}(f) = \int_{-T_{oss}/2}^{T_{oss}/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T_{oss}}\right) x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{oss}(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{4.5.1})$$

dove $x_{oss}(t) \triangleq x(t) \text{rect}(t/T_{oss})$ è il segnale sotto analisi, che viene inevitabilmente *troncato* a causa della limitatezza dell'intervallo di osservazione.

L'effetto del tempo finito di analisi è chiaro non solo nel tempo ma anche in frequenza. Infatti, avvalendoci del teorema del prodotto (Paragrafo 3.3.7), possiamo scrivere che:

$$X_{oss}(f) = X(f) \otimes [T_{oss} \text{sinc}(f T_{oss})] \quad (\text{4.5.2})$$